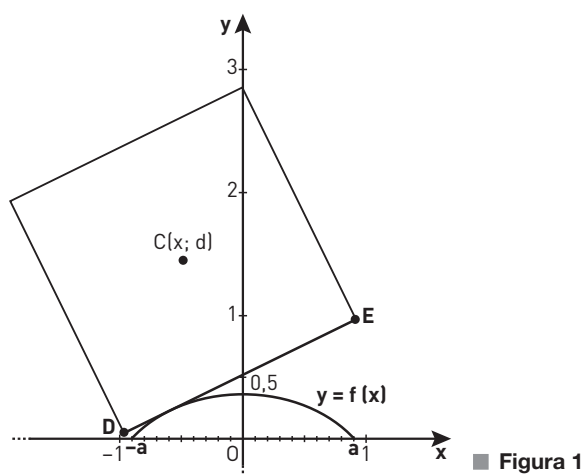


### PROBLEMA 1

Si può pedalare agevolmente su una bicicletta a ruote quadrate? A New York, al MoMath-Museum of Mathematics si può fare, in uno dei padiglioni dedicati al divertimento matematico. È però necessario che il profilo della pedana su cui il lato della ruota può scorrere soddisfi alcuni requisiti.

In figura è riportata una rappresentazione della situazione nel piano cartesiano  $Oxy$ : il quadrato di lato  $DE = 2$  (in opportune unità di misura) e di centro  $C$  rappresenta la ruota della bicicletta, il grafico della funzione  $f(x)$  rappresenta il profilo della pedana.

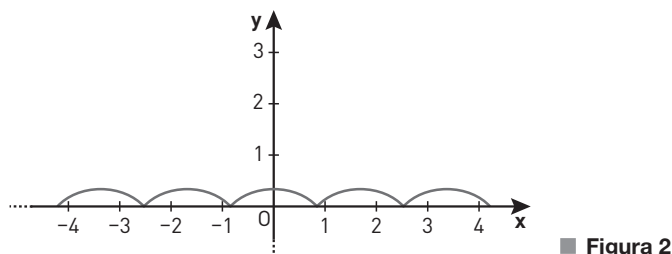


1. Sulla base delle informazioni ricavabili dal grafico in figura 1, mostra, con le opportune argomentazioni, che la funzione:

$$f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

rappresenta adeguatamente il profilo della pedana per  $x \in [-a; a]$ ; determina inoltre il valore degli estremi  $a$  e  $-a$  dell'intervallo.

Per visualizzare il profilo completo della pedana sulla quale la bicicletta potrà muoversi, si affiancano varie copie del grafico della funzione  $f(x)$  relativo all'intervallo  $[-a; a]$ , come mostrato in figura.



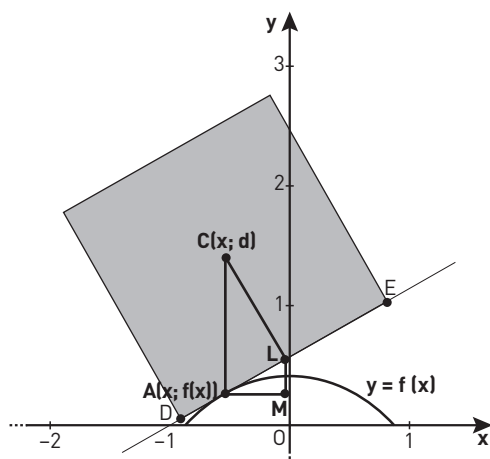
2. Perché la bicicletta possa procedere agevolmente sulla pedana è necessario che:

- a sinistra e a destra dei punti di non derivabilità i tratti del grafico siano ortogonali;
- la lunghezza del lato della ruota quadrata risulti pari alla lunghezza di una «gobba», cioè dell'arco di curva di equazione

$$y = f(x) \text{ per } x \in [-a; a].$$

Stabilisci se tali condizioni sono verificate<sup>1</sup>.

3. Considerando la similitudine dei triangoli rettangoli  $ACL$  e  $ALM$  in figura, e ricordando il significato geometrico della derivata, verifica che il valore dell'ordinata  $d$  del centro della ruota si mantiene costante durante il moto. Pertanto, al ciclista sembra di muoversi su una superficie piana.



■ Figura 3

Anche il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \text{ per } x \in \left[-\frac{\ln(3)}{2}; \frac{\ln(3)}{2}\right]$$

se replicato varie volte, può rappresentare il profilo di una pedana adatta a essere percorsa da una bicicletta con ruote molto particolari, aventi la forma di un poligono regolare.

4. Individua tale poligono regolare, motivando la risposta.

1. In generale, la lunghezza dell'arco di curva avente equazione  $y = \varphi(x)$  compreso tra le ascisse  $x_1$  e  $x_2$  è data da

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx.$$

**PROBLEMA 1**

1. Studiamo la funzione  $f(x)$  per verificare che il suo grafico sia compatibile con il profilo della pedana.

*Dominio della funzione.*  $x \in \mathbb{R}$

*Eventuali simmetrie della funzione.*

$$f(-x) = \sqrt{2} - \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \sqrt{2} - \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x)$$

La funzione è pari.

*Intersezione con l'asse y.*

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{2} - \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

Osserviamo che  $\sqrt{2} - 1 \simeq 0,414 < 0,5$ ; nel grafico vediamo che effettivamente l'intersezione della curva con l'asse y ha ordinata minore di 0,5.

*Intersezioni con l'asse x.*

$$y = 0 \rightarrow \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0 \rightarrow e^x + \frac{1}{e^x} = 2\sqrt{2} \rightarrow$$

$$\frac{e^{2x} + 1}{e^x} = \frac{2\sqrt{2}e^x}{e^x} \xrightarrow{e^x > 0} e^{2x} - 2\sqrt{2}e^x + 1 = 0$$

Poniamo  $z = e^x$ .

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 1 = 0 \rightarrow z = \sqrt{2} \pm 1.$$

Osserviamo che i due valori ottenuti sono positivi, quindi otteniamo due soluzioni distinte per  $x$ .

$$e^x = \sqrt{2} \pm 1 \rightarrow x = \ln(\sqrt{2} + 1) \vee x = \ln(\sqrt{2} - 1).$$

Per la simmetria della funzione, i due valori ottenuti sono opposti, con  $\ln(\sqrt{2} \pm 1) \simeq \pm 0,88$ .

Concludiamo che  $a = \ln(\sqrt{2} + 1)$ .

*Segno della funzione.*

$$y > 0 \rightarrow \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0 \rightarrow e^x + \frac{1}{e^x} < 2\sqrt{2} \rightarrow$$

$$\frac{e^{2x} + 1}{e^x} < \frac{2\sqrt{2}e^x}{e^x} \xrightarrow{e^x > 0} e^{2x} - 2\sqrt{2}e^x + 1 < 0$$

Poniamo  $z = e^x$  e ricordiamo che  $\ln(x)$  è una funzione monotona crescente.

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 1 < 0 \rightarrow \sqrt{2} - 1 < z < \sqrt{2} + 1 \rightarrow \ln(\sqrt{2} - 1) < x < \ln(\sqrt{2} + 1).$$

Quindi  $f(x)$  è positiva nell'intervallo  $] -a; a[$ , in accordo al grafico assegnato.

Studio della derivata prima.

$$f'(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2}$$

$$f'(x) > 0 \rightarrow e^{-x} - e^x > 0 \rightarrow e^x < \frac{1}{e^x} \xrightarrow{e^x > 0} e^{2x} < 1 \rightarrow 2x < \ln 1 \rightarrow x < 0$$

La funzione è quindi crescente per  $x < 0$ , decrescente per  $x > 0$ . Per  $x = 0$  la funzione ha un massimo assoluto.

Studio della derivata seconda.

$$f''(x) = -\frac{e^x + e^{-x}}{2} \rightarrow f''(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La funzione non ha flessi e volge la concavità verso il basso.

Possiamo concludere che il grafico della funzione assegnata è compatibile con il profilo della pedana.

2. Chiamiamo  $\bar{f}(x)$  la funzione ottenuta affiancando le copie del grafico di  $f(x)$ .  $\bar{f}(x)$  è una funzione continua, periodica di periodo  $2a$ . Calcoliamo la derivata sinistra e la derivata destra nel punto di non derivabilità  $x = a = \ln(\sqrt{2} + 1)$ .

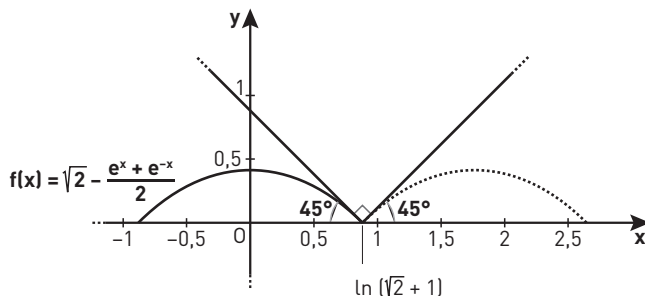
$$\bar{f}'_-(a) = f'(a) = \frac{e^{-a} - e^a}{2} = \frac{1 - e^{2a}}{2e^a} = \frac{1 - e^{2\ln(\sqrt{2}+1)}}{2e^{\ln(\sqrt{2}+1)}} =$$

$$\frac{1 - (\sqrt{2} + 1)^2}{2(\sqrt{2} + 1)} = \frac{1 - 2 - 1 - 2\sqrt{2}}{2(\sqrt{2} + 1)} = \frac{-2(\sqrt{2} + 1)}{2(\sqrt{2} + 1)} = -1$$

Per la periodicità di  $\bar{f}(x)$  e per la simmetria di  $f'(x)$  (che è una funzione dispari), otteniamo:

$$\bar{f}'_+(a) = f'(-a) = -f'(a) = 1.$$

Nel punto  $x = a$  la tangente sinistra e la tangente destra del grafico hanno coefficienti angolari rispettivamente  $-1$  e  $1$ ; il prodotto di tali coefficienti angolari è  $-1$ , quindi le rette sono perpendicolari. Per la periodicità la stessa proprietà vale in tutti i punti di non derivabilità.



■ Figura 5

Per determinare la lunghezza dell'arco descritto da  $f(x)$  in  $[-a; a]$  calcoliamo l'integrale

$$L = \int_{-a}^a \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Poiché  $f'(x)$  è dispari, la funzione integranda è pari, quindi:

$$L = 2 \int_0^a \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2 \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{e^{-x} - e^x}{2}\right)^2} dx =$$

$$2 \int_0^a \sqrt{\frac{4 + e^{-2x} + e^{2x} - 2}{4}} dx = \int_0^a \sqrt{2 + e^{-2x} + e^{2x}} dx.$$

Osserviamo che l'espressione all'interno della radice quadrata è uguale a  $(e^x + e^{-x})^2$ , quindi:

$$L = \int_0^a \sqrt{(e^x + e^{-x})^2} dx = \int_0^a (e^x + e^{-x}) dx = [e^x - e^{-x}]_0^a =$$

$$e^a - e^{-a} = e^{\ln(\sqrt{2}+1)} - e^{-\ln(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{2 + 1 + 2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2} + 1} = 2$$

L'arco è quindi lungo come il lato del quadrato.

In alternativa l'integrale  $\int_0^a \sqrt{2 + e^{-2x} + e^{2x}} dx$  si poteva risolvere per sostituzione, ponendo  $e^x = t$ .

Dal cambio di variabile segue:

$$x = \ln t \rightarrow dx = \frac{1}{t} dt;$$

$$x = 0 \rightarrow t = 1;$$

$$x = a \rightarrow t = e^a.$$

L'integrale diventa:

$$L = \int_1^{e^a} \sqrt{2 + \frac{1}{t^2} + t^2} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_1^{e^a} \sqrt{\frac{2t^2 + 1 + t^4}{t^2}} \cdot \frac{1}{t} dt =$$

$$\int_1^{e^a} \sqrt{\left(\frac{t^2 + 1}{t}\right)^2} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_1^{e^a} \frac{t^2 + 1}{t^2} dt = \int_1^{e^a} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = [t - t^{-1}]_1^{e^a} =$$

$$e^a - e^{-a} = e^{\ln(\sqrt{2}+1)} - e^{-\ln(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} =$$

$$\frac{2 + 1 + 2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2} + 1} = 2.$$

Come ulteriore possibilità, potevamo risolvere l'integrale:

$$L = 2 \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{e^{-x} - e^x}{2}\right)^2} dx$$

applicando le formule del seno iperbolico e del coseno iperbolico.

Se ricordiamo infatti che:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1;$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + c; \quad \int \cosh x dx = \sinh x + c;$$

per l'integrale  $L$  ricaviamo:

$$L = 2 \int_0^a 1 + \left(\frac{e^{-x} - e^x}{2}\right)^2 dx = 2 \int_0^a \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx = 2 \int_0^a \sqrt{1 + (\cosh^2 x - 1)} dx =$$

$$2 \int_0^a \sqrt{\cosh^2 x} dx = 2 \int_0^a \cosh x dx = 2 [\sinh x]_0^a = 2 \left( \frac{e^a - e^{-a}}{2} - \frac{e^0 - e^{-0}}{2} \right) = e^a - e^{-a},$$

da cui si ottiene il risultato precedente.

- Il punto  $L$  è la proiezione del centro  $C$  del quadrato sul lato  $DE$ , quindi il triangolo  $ACL$  è rettangolo in  $L$ . Il punto  $M$  ha la stessa ascissa di  $L$  e la stessa ordinata di  $A$ , quindi il triangolo  $ALM$  è rettangolo in  $M$ . Le rette  $AC$  e  $LM$  sono parallele perché entrambe parallele all'asse  $y$ , quindi formano con la trasversale  $DE$  angoli alterni interni congruenti:  $\widehat{ALM} \cong \widehat{LAC}$ . I triangoli  $ACL$  e  $ALM$  hanno dunque tutti gli angoli congruenti e quindi sono simili.

Per il significato geometrico della derivata prima:

$$\frac{\overline{LM}}{\overline{AM}} = f'(x).$$

Per la similitudine fra i triangoli abbiamo:

$$\frac{\overline{LM}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{LC}},$$

dove  $\overline{LC} = 1$  poiché corrisponde a metà del lato del quadrato. Combinando le due uguaglianze otteniamo

$$f'(x) = \frac{\overline{AL}}{\overline{LC}} \rightarrow f'(x) = \overline{AL}.$$

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo  $ACL$ :

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= \sqrt{\overline{LC}^2 + \overline{AL}^2} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{e^{-x} - e^x}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{4 + e^{-2x} + e^{2x} - 2}{4}} = \sqrt{\frac{2 + e^{-2x} + e^{2x}}{4}} = \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.\end{aligned}$$

Pertanto:

$$d = f(x) + \overline{AC} = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sqrt{2}.$$

- d. Per evitare ambiguità, chiamiamo  $g(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ . Osserviamo che il grafico di  $g(x)$  si ottiene da quello di  $f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  tramite una traslazione verso il basso lungo l'asse  $y$ , in quanto  $\frac{2}{\sqrt{3}} < \sqrt{2}$ .

Determiniamo l'angolo  $\alpha$  formato dalla tangente a  $g(x)$  nel punto  $x = -\frac{\ln 3}{2}$  con l'asse  $x$ , calcolando la derivata prima di  $g(x)$  in tale punto.

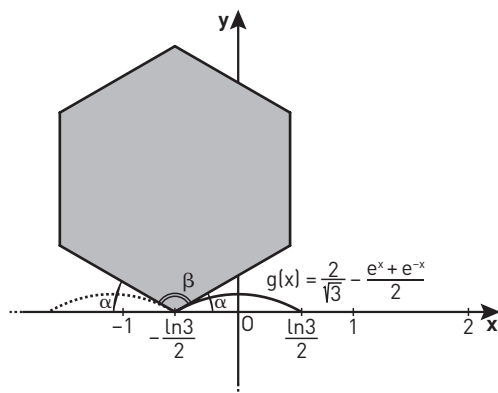
$$g'(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} \rightarrow g'\left(-\frac{\ln 3}{2}\right) = \frac{e^{\frac{\ln 3}{2}} - e^{-\frac{\ln 3}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{3 - 1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^\circ$$

L'angolo interno  $\beta$  del poligono regolare cercato è quindi:

$$\beta = 180^\circ - 2\alpha = 120^\circ.$$

Il poligono regolare che ha angoli interni di  $120^\circ$  è l'esagono regolare.



■ Figura 6

Infine, per calcolare la lunghezza  $l$  del lato dell'esagono regolare, imponiamo che tale lunghezza sia uguale a quella della «gobba» individuata da  $g(x)$  nell'intervallo  $\left[-\frac{\ln 3}{2}, \frac{\ln 3}{2}\right]$ .

Poiché  $g'(x) = f'(x)$ , i calcoli sono simili a quelli svolti nel punto 2. nel caso del quadrato, cambiando solo gli estremi di integrazione:

$$l = \int_0^{\frac{\ln 3}{2}} 1 + [g'(x)]^2 dx = \dots = [e^x - e^{-x}]_0^{\frac{\ln 3}{2}} = e^{\frac{\ln 3}{2}} - e^{-\frac{\ln 3}{2}} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 1,15.$$