

6 Si stabilisca se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando la risposta:

«Esiste un polinomio $P(x)$ tale che $|P(x) - \cos(x)| \leq 10^{-3}, \forall x \in \mathbb{R}$ ».

6 Qualunque polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, di grado $n \geq 1$, ha limite

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |P(x)| = +\infty.$$

Poiché $y = \cos x$ è una funzione limitata, i cui valori sono compresi tra -1 e $+1$, abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |P(x) - \cos x| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |P(x)| = +\infty,$$

che è quindi maggiore di 10^{-3} .

D'altra parte, per un polinomio di grado zero, $P(x) = k$, risulta

$$|P(x) - \cos x| = |k - \cos x|.$$

Poiché $y = \cos x$ è una funzione limitata, i cui valori sono compresi tra -1 e $+1$, si ha

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |k - \cos x| = |k| + 1 > 10^{-3}.$$

È quindi falso affermare che esista un polinomio $P(x)$ tale che

$$|P(x) - \cos x| \leq 10^{-3}, \forall x \in \mathbb{R}.$$