PROBLEMA 2

La rotazione intorno all'asse x dei grafici della famiglia di funzioni:

$$f_k(x) = \frac{x}{4k}\sqrt{k^2 - x}, \quad \text{con } x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq x \leq k^2, \quad k \in \mathbb{R}, \quad k > 0,$$

genera dei solidi di rotazione di forma aerodinamica.

a. In un riferimento cartesiano Oxy, traccia i grafici delle funzioni $f_k(x)$, per $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$, e determina il valore di k per il quale il volume del solido di rotazione assume il valore $\frac{64\pi}{192}$;

b. calcola il diametro massimo dei solidi di rotazione in funzione di k, e determina il valore dell'angolo formato dalla tangente al grafico di f_k con l'asse x per $x = 0$;

c. assumendo che la distribuzione della massa sia omogenea, il baricentro del corpo di rotazione si trova sull'asse x, per ragioni di simmetria. Determina l'ascissa x_S del baricentro in funzione del parametro k, sapendo che vale:

$$x_S = \frac{\pi \int_a^b x[f_k(x)^2]dx}{V},$$

dove gli estremi di integrazione a e b vanno scelti opportunamente, e V indica il volume del solido di rotazione;

d. all'interno del solido di rotazione generato da f_k, per $k = 3$, si vorrebbe collocare un cilindro di raggio 0,5 e di altezza 6. Verifica se ciò è possibile, motivando la tua risposta.

PROBLEMA 2

a. Il dominio naturale della funzione $f_k(x)$ è dato da: $x \leq k^2$. Tuttavia, nella definizione data, si considera solo la restrizione di $f_k(x)$ all'intervallo $[0; k^2]$. Notiamo che tale intervallo non è lo stesso per ogni $k > 0$, ma cresce in ampiezza al crescere di k.

Nel dominio $[0; k^2]$, le funzioni $f_k(x)$ sono continue e positive, tranne che agli estremi $x = 0$ e $x = k^2$, dove si annullano: $f_k(0) = f_k(k^2) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Per individuare gli intervalli di crescita e decrescita di $f_k(x)$, calcoliamone la derivata prima:

$$f_k'(x) = \frac{1}{4k}\sqrt{k^2 - x} + \frac{x}{4k} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{k^2 - x}}\right) = \frac{\sqrt{k^2 - x}}{4k} - \frac{x}{8k\sqrt{k^2 - x}} =$$

$$\frac{2(k^2 - x) - x}{8k\sqrt{k^2 - x}} = \frac{2k^2 - 3x}{8k\sqrt{k^2 - x}}.$$

La derivata $f_k'(x)$ è definita per $x \in [0; k^2[$.

Il segno di $f_k'(x)$ è lo stesso di $2k^2 - 3x$, perciò:

- $f_k'(x) = 0 \to 2k^2 - 3x = 0 \to x = \frac{2}{3}k^2$; la funzione ha un punto stazionario di ascissa $\frac{2}{3}k^2$;
- $f_k'(x) > 0 \to 2k^2 - 3x > 0 \to 0 \leq x < \frac{2}{3}k^2$.

La funzione $f_k(x)$ è quindi crescente per $0 < x < \frac{2}{3}k^2$ e decrescente per $\frac{2}{3}k^2 < x < k^2$. Il punto di ascissa $x = \frac{2}{3}k^2$ è di massimo assoluto, con:

$$f_k\left(\frac{2}{3}k^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{18}k^2.$$

Soffermiamoci su quanto avviene agli estremi del grafico. Osserviamo che $f_k'(0) = \frac{2k^2}{8k\sqrt{k^2}} = \frac{1}{4}$. La derivata destra è definita nell'estremo sinistro del dominio, $x = 0$, e vale $\frac{1}{4}$. Ciò significa che la retta tangente al grafico di $f_k(x)$ nel punto $(0; 0)$ non dipende dal valore di k, ma ha sempre equazione $y = \frac{1}{4}x$.

Invece, all'altro estremo del dominio, $x = k^2$, la derivata non è definita, ma è possibile calcolarne il limite da sinistra:

$$\lim_{x \to k^{2-}} f_k'(x) = \lim_{x \to k^{2-}} \frac{2k^2 - 3x}{8k\sqrt{k^2 - x}} = -\infty.$$

Poiché la funzione $f_k(x)$ è definita per $x = k^2$, concludiamo che il grafico di $f_k(x)$ ha una tangente verticale in corrispondenza del punto $(k^2; 0)$.

Calcoliamo la derivata seconda:

$$f_k''(x) = \frac{3x - 4k^2}{16k\left(\sqrt{k^2 - x}\right)^3}.$$

Per $x \in [0; k^2[$, la derivata seconda è negativa per ogni valore di k, quindi la concavità di tutte le funzioni $f_k(x)$ è rivolta sempre verso il basso.

- La funzione $f_1(x) = \frac{\pi}{4}\sqrt{1-x}$ ha dominio $[0;1]$; cresce per $x \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$, decresce per $x \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$; ha un massimo per $x = \frac{2}{3}$, con $f_1\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{18} \simeq 0,1$.
- La funzione $f_2(x) = \frac{\pi}{8}\sqrt{4-x}$ ha dominio $[0;4]$; cresce per $x \in \left[0; \frac{8}{3}\right]$, decresce per $x \in \left[\frac{8}{3}; 4\right]$; ha un massimo per $x = \frac{8}{3}$, con $f_2\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{3} \simeq 0,4$.
- La funzione $f_3(x) = \frac{\pi}{12}\sqrt{9-x}$ ha dominio $[0;9]$; cresce per $x \in [0;6]$, decresce per $x \in [6;9]$; ha un massimo per $x = 6$, con $f_3(6) = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,9$.

Chiamiamo M_1, M_2 e M_3 i punti dei grafici che corrispondono ai massimi delle tre funzioni.

Disegniamo il loro grafico, su un unico piano cartesiano Oxy.

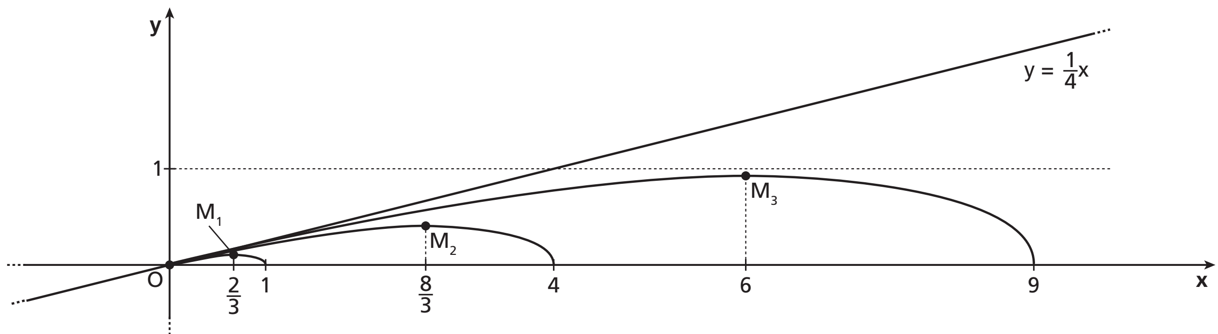

Figura 4

Il volume del solido ottenuto facendo ruotare il grafico di $f_k(x)$ attorno all'asse x è espresso dall'integrale:

$$V = \pi\int_0^{k^2} f_k^2(x)dx = \pi\int_0^{k^2}\frac{x^2}{16k^2}(k^2-x)dx = \frac{\pi}{16k^2}\cdot\int_0^{k^2}(k^2x^2-x^3)dx =$$

$$\frac{\pi}{16k^2}\left[k^2\cdot\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^{k^2} = \frac{\pi}{16k^2}\left(\frac{k^2\cdot k^6}{3} - \frac{k^8}{4}\right) = \frac{\pi}{16}\cdot k^6\cdot\frac{1}{12} = \frac{\pi}{192}k^6.$$

Imponiamo che il volume sia uguale a $\frac{64\pi}{192}$:

$$V = \frac{64\pi}{192} \rightarrow \frac{\pi}{192}k^6 = \frac{64\pi}{192} \rightarrow k^6 = 64 \rightarrow k = 2.$$

Il valore cercato è $k = 2$, che corrisponde alla funzione $f_2(x)$ studiata sopra.

b. Il diametro massimo del solido ottenuto dalla rotazione di $f_k(x)$ è uguale al doppio del massimo di $f_k(x)$, quindi:

$$D_{\max} = 2\cdot f_k\left(\frac{2}{3}k^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{9}k^2.$$

Abbiamo anche visto che la tangente al grafico di $f_k(x)$ in $x = 0$ è la retta $y = \frac{1}{4}x$, indipendentemente da k.

L'angolo α che essa forma con l'asse x ha come tangente trigonometrica il coefficiente angolare della retta, cioè $\frac{1}{4}$, pertanto:

$$\alpha = \arctan\frac{1}{4} \simeq 0,245 \rightarrow \alpha \simeq 14°2'10''.$$

c. Per determinare l'ascissa x_S del baricentro, osserviamo che gli estremi di integrazione coincidono con quelli dell'intervallo di definizione di $f_k(x)$, cioè $a = 0$ e $b = k^2$. Ricordiamo che il volume V del solido, che abbiamo calcolato nel punto **a**, è $V = \frac{\pi k^6}{192}$. Dopo aver fatto le opportune sostituzioni, possiamo procedere al calcolo:

$$x_S = \frac{\pi \int_a^b x[f_k(x)]^2 dx}{V} = \frac{192}{\pi k^6} \cdot \pi \cdot \int_0^{k^2} x \cdot \frac{x^2(k^2 - x)}{16k^2} dx =$$

$$\frac{192}{k^6} \cdot \frac{1}{16k^2} \cdot \int_0^{k^2} (k^2x^3 - x^4) dx =$$

$$\frac{12}{k^8}\left[k^2 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^{k^2} = \frac{12}{k^8} \cdot k^{10} \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{5}k^2.$$

L'ascissa del baricentro è dunque $x_S = \frac{3}{5}k^2$.

d. Per capire se il solido ottenuto dalla rotazione di $f_3(x)$ può contenere un cilindro di raggio 0,5 e altezza 6, osserviamo che anche tale cilindro si ottiene dalla rotazione di una figura piana, più precisamente dalla rotazione di un rettangolo, di base 6 e altezza 0,5, attorno alla base. Perciò il problema si può riformulare così: è possibile costruire, al di sotto del grafico di $f_3(x)$, un rettangolo che ha una base lunga 6 contenuta sull'asse x, e un'altezza 0,5?

Riportiamo il grafico di $f_3(x)$ e la retta di equazione $y = 0,5$.

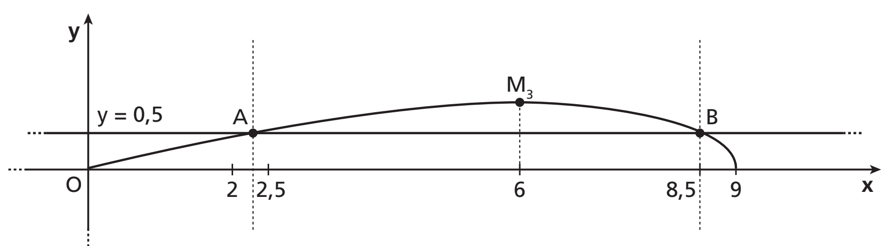

Figura 5

Osservando il grafico, ipotizziamo che $x_A < 2,5$, e $x_B \simeq 8,5$.
Le ascisse di A e B sono le soluzioni dell'equazione.

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{12}\sqrt{9-x} \rightarrow \frac{6}{x} = \sqrt{9-x} \rightarrow \frac{36}{x^2} = 9 - x \rightarrow x^3 - 9x^2 + 36 = 0.$$

Consideriamo il polinomio $p(x) = x^3 - 9x^2 + 36$ e compiliamo le seguenti tabelle per determinare gli intervalli in cui $p(x)$ cambia segno.

x_A	$p(x_A)$
2	8
2,5	$\simeq -4,6$
3	-18

x_B	$p(x_B)$
8	-28
8,5	$-0,1$
9	36

Possiamo quindi affermare che $2 < x_A < 2,5$ e $8,5 < x_B < 9$ poiché $p(x)$ cambia segno nei due intervalli.

Le ascisse di A e B distano dunque più di 6 unità, in quanto:

$$8,5 - 2,5 < x_B - x_A < 9 - 2 \rightarrow 6 < x_B - x_A < 7.$$

Esiste dunque il rettangolo di altezza 0,5 e base 6 che rimane al di sotto del grafico di $f_3(x)$; di conseguenza, esiste il cilindro richiesto di raggio 0,5 e altezza 6.