2 Data la funzione così definita in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x \cdot e^{-|x^3 - 1|},$$

determinarne minimi, massimi ed eventuali asintoti.

2 La funzione assegnata è continua in $\mathbb{R}$ e quindi non ammette asintoti verticali.
Studiamo gli asintoti orizzontali:

$$\lim_{x \to \pm\infty} x e^{-|x^3 - 1|} = 0.$$

Infatti si tratta di una forma indeterminata $0 \cdot \infty$, ma l'esponenziale tende a zero più velocemente di quanto x tenda all'infinito.
Quindi, $f(x)$ è priva di asintoti obliqui e la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale a $+\infty$ e a $-\infty$.
Per la ricerca dei punti di massimo e di minimo riscriviamo la funzione nella forma definita per casi:

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-x^3+1} & \text{se } x \geq 1 \\ x e^{x^3-1} & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

Calcoliamo:

$$f'(x) = \begin{cases} (1 - 3x^3)\, e^{-x^3+1} & \text{se } x > 1 \\ (1 + 3x^3)\, e^{x^3-1} & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

Osserviamo che

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} (1 + 3x^3)\, e^{x^3-1} = 4 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} (1 - 3x^3)\, e^{-x^3+1} = -2,$$

quindi la funzione non è derivabile in $x = 1$, dove presenta un punto angoloso $A(1; 1)$ che risulta un massimo relativo.
Studiamo il segno della derivata prima.

Per $x > 1$, otteniamo: $f'(x) \geq 0 \to 1 - 3x^3 \geq 0 \to x \leq \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

Notiamo che $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} < 1$ e quindi $f'(x) < 0\ \forall\, x > 1$, la funzione $f(x)$ risulta decrescente $\forall x > 1$.

Per $x < 1$ otteniamo: $f'(x) \geq 0 \to 1 + 3x^3 \geq 0 \to x \geq -\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

Notiamo che $-\sqrt[3]{\frac{1}{3}} < 1$ e quindi $B\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}; -\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\, e^{-\frac{4}{3}}\right)$ è punto di minimo relativo.

Rappresentiamo in figura il grafico complessivo della derivata prima di $f(x)$.

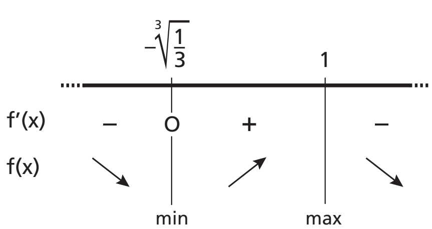

Figura 14

Possiamo tracciare un grafico approssimativo osservando che $f(x)$ passa per $O(0;\,0)$ e che $f(x) > 0$ per $x > 0$ e $f(x) < 0$ per $x < 0$.

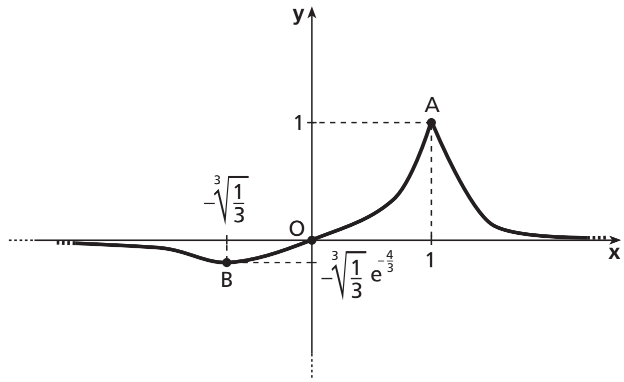

Figura 15