Liceo scientifico e opzione scienze applicate*

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita da $y(x) = (4x - 2) \cdot e^{2x}$.

1. Dimostra che la funzione possiede un unico punto di minimo e un unico punto di flesso. Calcola le coordinate del minimo e del flesso e traccia il grafico G_f della funzione;
2. dimostra che la funzione $g(x) = (-4x - 2) \cdot e^{-2x}$ è simmetrica a f rispetto all'asse y e tracciarne il grafico G_g;
3. detti P e Q i punti di intersezione rispettivamente del grafico G_f e del grafico G_g con l'asse x, determina l'area A della porzione di piano delimitata dal segmento PQ e dai grafici G_f e G_g;
4. sia f_a la famiglia di funzioni definite da $f_a(x) = (2ax - 2) \cdot e^{ax}$, con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Per ogni funzione f_a la tangente al grafico nel punto di flesso interseca l'asse x e l'asse y delimitando un triangolo rettangolo. Determina i valori di a per i quali tale triangolo è anche isoscele, spiegando il procedimento seguito.

---

* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all'estero, Americhe, 2015.

PROBLEMA 2

1. La funzione $f(x)=(4x-2)e^{2x}$ è continua e infinitamente derivabile su $\mathbb{R}$.
Studiamo la sua derivata prima per determinare i suoi eventuali punti di minimo e di massimo.

$$f'(x)=4e^{2x}+(4x-2)\cdot 2e^{2x}=8xe^{2x}.$$

Otteniamo allora:

- $f'(x)=0$ per $x=0$, con $f(0)=(4\cdot 0-2)e^{2\cdot 0}=-2$;
- $f'(x)>0$ e $f(x)$ crescente per $x>0$;
- $f'(x)<0$ e $f(x)$ decrescente per $x<0$.

La funzione ha dunque un solo punto di minimo relativo e assoluto di coordinate $(0;-2)$.

Procediamo in modo analogo con la derivata seconda.

$$f''(x)=8e^{2x}+8x\cdot 2e^{2x}=(8+16x)e^{2x}.$$

Risulta:

- $f''(x)=0$ per $x=-\frac{1}{2}$, con $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left[4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-2\right]e^{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=-4e^{-1}=-\frac{4}{e}\simeq-1,47$;
- $f''(x)>0$ e $f(x)$ volge la concavità verso l'alto per $x>-\frac{1}{2}$;
- $f''(x)<0$ e $f(x)$ volge la concavità verso il basso per $x<-\frac{1}{2}$.

La funzione ha dunque un solo punto di flesso di coordinate $\left(-\frac{1}{2};-\frac{4}{e}\right)$.

Per disegnare il grafico G_f, determiniamo infine le intersezioni con gli assi, i limiti agli estremi del dominio e il segno della funzione:

$f(0)=-2$ come già detto;

$$f(x)=0 \rightarrow (4x-2)e^{2x}=0 \rightarrow 4x-2=0 \rightarrow x=\frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(4x-2)e^{2x}=0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(4x-2)e^{2x}=+\infty;$$

$$f(x)>0 \rightarrow (4x-2)e^{2x}>0 \rightarrow 4x-2>0 \rightarrow x>\frac{1}{2}.$$

Disegniamo un grafico plausibile della funzione.

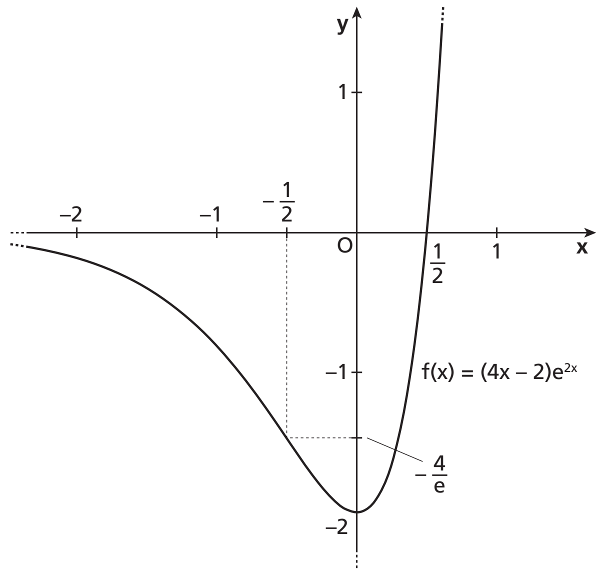

Figura 3

2. Poiché $g(x) = f(-x)$, la funzione $g(x)$ è simmetrica a $f(x)$ rispetto all'asse y; tracciamo il suo grafico G_g a partire dal grafico di $f(x)$.

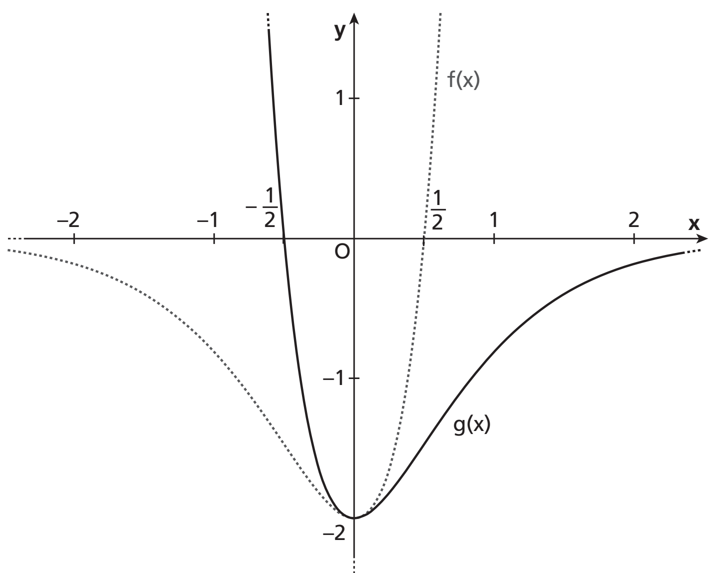

Figura 4

3. I punti P e Q hanno coordinate $P\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ e $Q\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Per la simmetria dei grafici G_f e G_g abbiamo:

$$A = -\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{0} g(x)dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)dx\right) = -2\int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = -2\int_{0}^{\frac{1}{2}} [(4x-2)e^{2x}]dx;$$

abbiamo anteposto il segno meno all'integrale per avere un valore positivo per l'area, visto che le funzioni sono negative nell'intervallo considerato.

Calcoliamo l'integrale indefinito corrispondente:

$$\int[(4x-2)e^{2x}]dx = \int(4xe^{2x} - 2e^{2x})dx =$$

$$\int 2x \cdot 2e^{2x}dx - \int 2e^{2x}dx = \int 2x \cdot \mathrm{D}[e^{2x}]dx - \int \mathrm{D}[e^{2x}]dx =$$

$$2xe^{2x} - \int 2e^{2x}dx - e^{2x} =$$

$$2xe^{2x} - e^{2x} - e^{2x} + c = (2x-2)e^{2x} + c,$$

dove siamo ricorsi all'integrazione per parti per risolvere $\int 4xe^{2x}dx$.

Tornando al calcolo dell'area, otteniamo:

$$A = -2\int_0^{\frac{1}{2}}[(4x-2)e^{2x}]dx = -2[(2x-2)e^{2x}]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$-2\left\{\left[\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 2\right)e^{2\frac{1}{2}}\right] - [(2 \cdot 0 - 2)e^{2 \cdot 0}]\right\} =$$

$$-2(-e+2) \simeq 1{,}44.$$

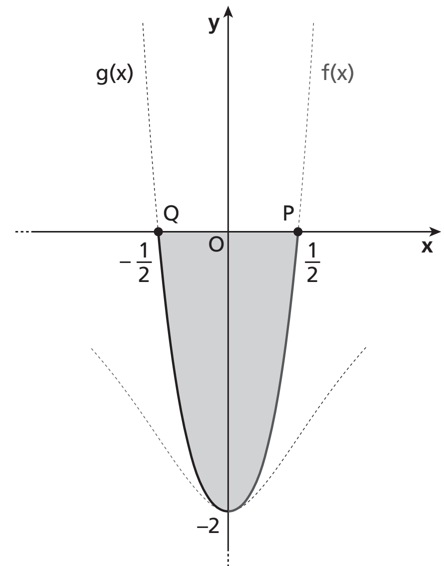

Figura 5

4. Consideriamo la funzione $f_a(x) = (2ax-2)e^{ax}$ della famiglia assegnata, con $a \neq 0$.
Osserviamo che la funzione $f(x)$ considerata in precedenza è la funzione della famiglia che si ottiene per $a = 2$, mentre $g(x)$ si ottiene per $a = -2$.
Più in generale, l'andamento della funzione $f_a(x)$ è simile a quello della funzione $f(x)$ per $a > 0$ e a quello della funzione $g(x)$ per $a < 0$. In particolare, per $a > 0$ $f_a(x)$ è ottenuta da $f(x)$ mediante una dilatazione o una contrazione orizzontale, per $a < 0$ $f_a(x)$ è ottenuta da $g(x)$ mediante una dilatazione o contrazione orizzontale:

$$f_a(x) = f(h(x)), \text{ con } h(x) = ax \text{ e } a \neq 0.$$

Determiniamo il punto di flesso di $f_a(x)$:

$$f_a'(x) = 2ae^{ax} + (2ax-2) \cdot ae^{ax} = 2a^2xe^{ax},$$

$$f_a''(x) = 2a^2e^{ax} + 2a^3xe^{ax} = 2a^2(1+ax)e^{ax}.$$

Poiché $a \neq 0$ per ipotesi, risulta:

$$f_a''(x) = 0 \ \rightarrow \ 1 + ax = 0 \ \rightarrow \ x = -\frac{1}{a};$$

inoltre $f_a''(x)$ cambia di segno prima e dopo $x = -\frac{1}{a}$, che risulta dunque l'ascissa dell'unico punto di flesso. Calcoliamo la corrispondente ordinata:

$$f_a\left(-\frac{1}{a}\right) = \left[2a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) - 2\right]e^{a\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)} = -4e^{-1} = -\frac{4}{e},$$

e osserviamo che il suo valore non dipende da a.

Il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di $f_a(x)$ nel punto di flesso $F\left(-\frac{1}{a}; -\frac{4}{e}\right)$ vale:

$$f_a'\left(-\frac{1}{a}\right) = 2a^2 \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)e^{a\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)} = -2ae^{-1} = -\frac{2a}{e}$$

e la retta tangente ha equazione:

$$y-f_a\left(-\frac{1}{a}\right)=f_a'\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot\left[x-\left(-\frac{1}{a}\right)\right] \rightarrow y+\frac{4}{e}=-2\frac{a}{e}\cdot\left(x+\frac{1}{a}\right) \rightarrow$$

$$y=-2\frac{a}{e}x-\frac{2}{e}-\frac{4}{e} \rightarrow y=-2\frac{a}{e}x-\frac{6}{e}.$$

Determiniamo le intersezioni della retta tangente con gli assi cartesiani.

Intersezione con l'asse x:

$$\begin{cases} y=-2\frac{a}{e}x-\frac{6}{e} \\ y=0 \end{cases} \rightarrow -2\frac{a}{e}x-\frac{6}{e}=0 \rightarrow -2ax-6=0 \rightarrow x=-\frac{3}{a} \rightarrow A\left(-\frac{3}{a};0\right).$$

Intersezione con l'asse y:

$$\begin{cases} y=-2\frac{a}{e}x-\frac{6}{e} \\ x=0 \end{cases} \rightarrow y=-2\frac{a}{e}\cdot 0-\frac{6}{e} \rightarrow y=-\frac{6}{e} \rightarrow B\left(0;-\frac{6}{e}\right).$$

Rappresentiamo la situazione relativa al caso $a>0$ nel disegno qui sotto, ricordando che la situazione relativa al caso $a<0$ si ottiene per simmetria rispetto all'asse y.

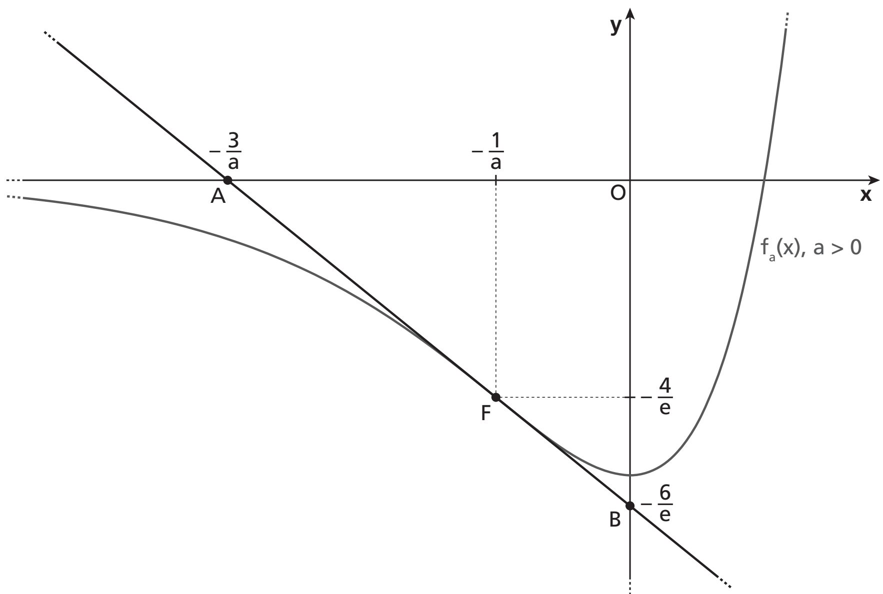

Figura 6

Il triangolo OAB è isoscele se i cateti OA e OB hanno la stessa lunghezza; imponendo questa condizione troviamo il valore di a cercato:

$$|x_A|=|y_B| \rightarrow \left|-\frac{3}{a}\right|=\left|-\frac{6}{e}\right| \rightarrow \frac{3}{a}=\pm\frac{6}{e} \rightarrow a=\pm\frac{e}{2}.$$

I valori di a per i quali OAB è isoscele sono due.

Per $a=\frac{e}{2}$, la tangente al grafico di $f_{\frac{e}{2}}$ nel punto di flesso è parallela alla bisettrice $y=-x$, come in figura.

Per $a=-\frac{e}{2}$, la tangente al grafico di $f_{-\frac{e}{2}}$ nel punto di flesso è parallela alla bisettrice $y=x$.