

- 6** Si stabilisca se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando la risposta:  
«Esiste un polinomio  $P(x)$  tale che  $|P(x) - \cos(x)| \leq 10^{-3}, \forall x \in \mathbb{R}$ ».

---

\* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all'estero, Europa, 2016.

**6** Qualunque polinomio  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ , di grado  $n \geq 1$ , ha limite

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |P(x)| = +\infty.$$

Poiché  $y = \cos x$  è una funzione limitata, i cui valori sono compresi tra  $-1$  e  $+1$ , abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |P(x) - \cos x| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |P(x)| = +\infty,$$

che è quindi maggiore di  $10^{-3}$ .

D'altra parte, per un polinomio di grado zero,  $P(x) = k$ , risulta

$$|P(x) - \cos x| = |k - \cos x|.$$

Poiché  $y = \cos x$  è una funzione limitata, i cui valori sono compresi tra  $-1$  e  $+1$ , si ha

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |k - \cos x| = |k| + 1 > 10^{-3}.$$

È quindi falso affermare che esista un polinomio  $P(x)$  tale che

$$|P(x) - \cos x| \leq 10^{-3}, \forall x \in \mathbb{R}.$$