

2 Data una parabola di equazione

$$y = 1 - ax^2, \quad \text{con } a > 0$$

si vogliono inscrivere dei rettangoli, con un lato sull'asse x , nel segmento parabolico delimitato dall'asse x . Determinare a in modo tale che il rettangolo di area massima sia anche il rettangolo di perimetro massimo.

- 2** Per qualunque valore di $a > 0$ la parabola è simmetrica rispetto all'asse y , passa per il punto $(0; 1)$ e per i punti $(\pm \frac{1}{\sqrt{a}}; 0)$ e ha concavità verso il basso. Il punto generico P della parabola ha coordinate $(x_p; 1 - ax_p^2)$.

Il rettangolo inscritto nel segmento parabolico delimitato dall'asse x ha vertici di coordinate $A(x_p; 0)$, $B(x_p; 1 - ax_p^2)$, $C(-x_p; 1 - ax_p^2)$ e $D(-x_p; 0)$, con la condizione $0 \leq x_p \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$.

Possiamo esprimere perimetro e area del rettangolo $ABCD$ come funzioni dell'ascissa x_p :

$$2p(x_p) = 4x_p + 2(1 - ax_p^2) \rightarrow 2p(x_p) = -2ax_p^2 + 4x_p + 2;$$

$$A(x_p) = 2x_p(1 - ax_p^2) = 2(x_p - ax_p^3), \text{ con } 0 \leq x_p \leq \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Per determinare per quale valore di a l'area del rettangolo è massima calcoliamo la derivata prima della funzione che esprime l'area e studiamone il segno:

$$A'(x_p) = 2 - 6ax_p^2 \quad \text{con } 0 \leq x_p \leq \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

$$A'(x_p) = 0 \rightarrow 2 - 6ax_p^2 = 0 \rightarrow 3ax_p^2 = 1 \rightarrow x_p = \pm \frac{\sqrt{3a}}{3a}.$$

La radice esiste sempre poiché, per ipotesi, $a > 0$.

Siccome siamo interessati all'ascissa positiva consideriamo $x_p = \frac{\sqrt{3a}}{3a}$ e osserviamo che $x_p < \frac{1}{\sqrt{a}} \forall a > 0$.

$$A'(x_p) > 0 \rightarrow 3ax_p^2 < 1 \rightarrow 0 < x_p < \frac{\sqrt{3a}}{a}.$$

$$A'(x_p) < 0 \rightarrow \frac{\sqrt{3a}}{3a} < x_p < \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Quindi $x_p = \frac{\sqrt{3a}}{3a}$ è punto di massimo ed è un punto interno all'intervallo $[0; \frac{1}{\sqrt{a}}]$.

Procediamo allo stesso modo per determinare per quale valore di x_p il perimetro assume valore massimo. Calcoliamo la derivata prima e studiamo il suo segno:

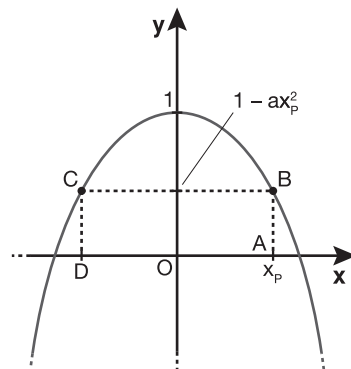
$$2p'(x_p) = -4ax_p + 4 \quad \text{con } 0 \leq x_p \leq \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

$$2p'(x_p) = 0 \rightarrow -4ax_p + 4 = 0 \rightarrow x_p = \frac{1}{a}.$$

Osserviamo che $\frac{1}{a} < \frac{1}{\sqrt{a}}$ per $a > 1$ e che $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{\sqrt{a}}$ per $0 < a \leq 1$.

$$2p'(x_p) > 0 \rightarrow x_p < \frac{1}{a}.$$

$$2p'(x_p) < 0 \rightarrow x_p > \frac{1}{a}.$$



■ Figura 14

Quindi $x_p = \frac{1}{a}$ è punto di massimo se $a > 1$, ossia se x_p è interno a $\left[0; \frac{1}{\sqrt{a}}\right]$.

Uguagliamo le due espressioni in a che abbiamo trovato per x_p per determinare il valore di a :

$$\frac{\sqrt{3a}}{3a} = \frac{1}{a} \rightarrow a = 3, \text{ che è accettabile perché } 3 > 1.$$

L'equazione della parabola che soddisfa le condizioni del problema è: $y = 1 - 3x^2$.