Liceo scientifico e opzione scienze applicate

PROBLEMA 1

Sei stato incaricato di progettare una pista da ballo all'esterno di un locale in costruzione in una zona balneare. Il progetto prevede, oltre alla pista, delle zone verdi e una tettoia che consenta l'uso della pista anche in caso di pioggia.

La pista da ballo viene rappresentata, in un sistema di riferimento cartesiano *Oxy* in cui l'unità di misura corrisponde a 1 metro, all'interno del rettangolo avente come vertici i punti di coordinate $(-4; 0)$, $(4; 0)$, $(-4; 25)$ e $(4; 25)$; nella scelta della sagoma della pista va rispettato il vincolo urbanistico che stabilisce che essa non può occupare più del 60% della superficie di tale rettangolo.

Un tuo collaboratore predispone due soluzioni: la prima è rappresentata dalla parte di piano compresa tra l'asse x e la curva di equazione $y = -\frac{25}{16}x^2 + 25$, $x \in [-4; 4]$, la seconda parte di piano compresa tra l'asse x, la curva di equazione $y = \frac{100}{4 + x^2}$ e le rette $x = -2\sqrt{3}$, $x = 2\sqrt{3}$.

a. Studia le due soluzioni, e traccia il grafico di entrambe nel riferimento cartesiano *Oxy*. Individua in particolare le caratteristiche delle due funzioni che sono più rilevanti nella fase di costruzione della pista: eventuali punti di massimo e di minimo, di flesso, angolosi.

Il proprietario del locale sceglie la seconda soluzione, che ritiene più elegante, ma ti chiede di realizzare due aiuole nelle porzioni di terreno comprese tra le due curve che gli hai proposto.

b. Determina l'area della soluzione scelta e verifica che essa rispetti i vincoli urbanistici, in modo da poter poi procedere all'acquisto del materiale necessario per la costruzione della pista.

Poiché lo scavo effettuato ai lati della pista ha reso il terreno scosceso, hai fatto eseguire delle misure e hai verificato che sia per $x \in [-2\sqrt{3}; 0]$ che per $x \in [0; 2\sqrt{3}]$ la profondità dello scavo stesso varia con la legge lineare rappresentata dalla funzione $f(x) = |x| + 1$; è dunque necessario acquistare del terreno per riempire lo scavo e realizzare le aiuole richieste.

c. Calcola quanti metri cubi di terreno vegetale sono necessari per riempire l'aiuola delimitata dalle suddette curve nell'intervallo $[-2\sqrt{3}; 0]$.

Per realizzare la tettoia, è necessario usare un piano leggermente inclinato, per favorire il deflusso della pioggia. Nel sistema di riferimento cartesiano *Oxyz*, tale piano deve passare per i punti $(-4; 0; 5)$, $(4; 0; 5)$ e $(0; 25; 4)$, in modo che la quota vari gradualmente dai 5 metri in corrispondenza dell'inizio della pista ai 4 metri in corrispondenza della fine della pista stessa.

d. Determina l'equazione del piano prescelto.

PROBLEMA 1

a. Studiamo le funzioni $p(x) = -\frac{25}{16}x^2 + 25$ e $g(x) = \frac{100}{4 + x^2}$ nel dominio richiesto dal problema.

- $p(x) = -\frac{25}{16}x^2 + 25$ rappresenta una parabola simmetrica rispetto all'asse y con la concavità rivolta verso il basso e di vertice $V(0; 25)$. La funzione $p(x)$ è quindi è crescente per $x < 0$, decrescente per $x > 0$ e ammette massimo assoluto in V.

  Nel dominio $[-4; 4]$ considerato, la curva assume minimo nei punti $A(-4; 0)$ e $D(4; 0)$, due dei vertici del rettangolo che dovrebbe contenere la pista.

- $g(x) = \frac{100}{4 + x^2}$ è razionale fratta, con denominatore $4 + x^2$ sempre positivo: il suo dominio naturale è $\mathbb{R}$. È una funzione pari, $g(-x) = \frac{100}{4 + (-x)^2} = \frac{100}{4 + x^2} = g(x)$, quindi simmetrica rispetto all'asse y. Il punto di intersezione tra l'asse y e il grafico di $g(x)$ coincide con il vertice $V(0; 25)$ della parabola.

  Non ci sono invece punti di intersezione tra il grafico di $g(x)$ e l'asse x, in quanto $g(x)$ è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$.

  La derivata prima di $g(x)$ si può calcolare con la regola di derivazione delle funzioni composte:

  $$g'(x) = -\frac{100}{(4 + x^2)^2} \cdot 2x = -\frac{200x}{(4 + x^2)^2}.$$

  Il denominatore è sempre positivo; $g'(x)$ si annulla solo per $x = 0$, è positiva per $x < 0$ e negativa per $x > 0$. Quindi $g(x)$ è crescente per $x < 0$, decrescente per $x > 0$ e ha un punto di massimo sia relativo sia assoluto per $x = 0$, con $g(0) = 25$ (corrisponde al punto V).

  La derivata seconda è:

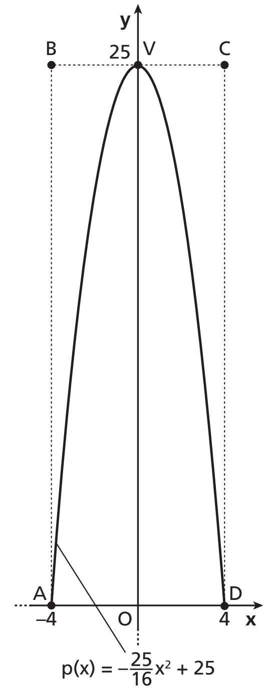
  $$g''(x) = -200 \cdot \frac{(4 + x^2)^2 - 4x^2(4 + x^2)}{(4 + x^2)^4} = (3x^2 - 4) \cdot \frac{200}{(4 + x^2)^3}.$$

  Il secondo fattore è sempre positivo, quindi il segno di $g''(x)$ è quello di $3x^2 - 4$. Risulta allora:

  $$g''(x) = 0 \qquad \text{per} \qquad x = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3};$$

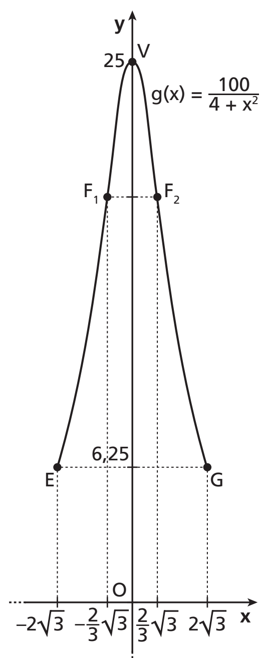
  $$g''(x) > 0 \qquad \text{per} \qquad x < -\frac{2}{3}\sqrt{3} \vee x > \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

  Concludiamo che la concavità del grafico di $g(x)$ è rivolta verso il basso per $x \in \left]-\frac{2}{3}\sqrt{3}; \frac{2}{3}\sqrt{3}\right[$, mentre è rivolta verso l'alto per x esterno a tale intervallo. Gli estremi $x = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$ corrispondono a punti di flesso con tangente obliqua.



■ **Figura 1**

■ **Figura 2**



Calcoliamo il valore di $g(x)$ in tali punti:

$$g\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = g\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{75}{4} = 18,75.$$

Si ottengono i due flessi, simmetrici rispetto all'asse y: $F_{1,2}\left(\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}; \frac{75}{4}\right)$. Nell'intervallo $[-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$, il grafico di $g(x)$ presenta dunque il massimo in V e due flessi. Negli estremi dell'intervallo, $x = \pm 2\sqrt{3}$, la funzione $g(x)$ assume il valore $g(-2\sqrt{3}) = g(2\sqrt{3}) = \frac{25}{4} = 6,25$ e il grafico presenta i due punti di minimo $E(-2\sqrt{3}; 6,25)$ e $G(2\sqrt{3}; 6,25)$.

b. L'area compresa tra il grafico della funzione $g(x)$, l'asse x e le due rette di equazioni $x = -2\sqrt{3}$ e $x = 2\sqrt{3}$ è data dall'integrale definito di $g(x)$ esteso all'intervallo $[-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$.

Cerchiamo la primitiva di $g(x)$:

$$\int \frac{100}{4+x^2}dx = 100\int \frac{1}{4\left[1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right]}dx = 50\int \frac{\left(\frac{1}{2}\right)dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 50\arctan\frac{x}{2} + c.$$

Calcoliamo allora l'area, ovvero l'integrale definito:

$$\text{area} = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \frac{100}{4+x^2}dx = \left[50\arctan\frac{x}{2}\right]_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} =$$

$$50\left[\arctan\sqrt{3} - \arctan(-\sqrt{3})\right] = 50\left[\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{100}{3}\pi \simeq 104,72.$$

L'area corrispondente alla soluzione scelta è dunque area = 104,72 m^2.
L'area del rettangolo che contiene la pista è $\text{area}_r = 8 \cdot 25 = 200$ m^2, quindi la porzione occupata dalla pista è $\frac{\text{area}}{\text{area}_r} = \frac{104,72}{200} \simeq 0,52 = 52\%$.

Essa risulta entro i limiti del 60% consentiti dal vincolo urbanistico: si può procedere alla costruzione.

c. Abbiamo già osservato che i massimi di $p(x)$ e $g(x)$ coincidono, essendo $p(0) = g(0) = 25$. Inoltre, i grafici di $p(x)$ e $g(x)$ si intersecano anche nei punti E e G, in quanto:

$$p(-2\sqrt{3}) = p(2\sqrt{3}) = \frac{25}{4} = 6,25.$$

Per trovare quanto terreno serve per riempire l'aiuola che appartiene al secondo quadrante, è necessario calcolare il volume V del solido che ha:

- come base la superficie compresa tra le due curve, per $x \in [-2\sqrt{3}; 0]$;
- come sezioni, ottenute con i piani perpendicolari all'asse x, dei rettangoli di altezza $1 + |x|$ e base $p(x) - g(x)$.

Per la simmetria dei grafici, possiamo calcolare il volume nell'intervallo $[0; 2\sqrt{3}]$, in cui $x \geq 0$ e l'altezza è $1 + x$:

$$V = \int_{-2\sqrt{3}}^{0} [p(x) - g(x)](1 + |x|)dx = \int_{0}^{2\sqrt{3}} [p(x) - g(x)](1 + x)dx =$$

$$\int_{0}^{2\sqrt{3}} \left(-\frac{25}{16}x^2 + 25 - \frac{100}{4+x^2}\right)(1+x)dx =$$

$$\int_{0}^{2\sqrt{3}} \left(-\frac{25}{16}x^2 + 25 - \frac{100}{4+x^2} - \frac{25}{16}x^3 + 25x - \frac{100x}{4+x^2}\right)dx =$$

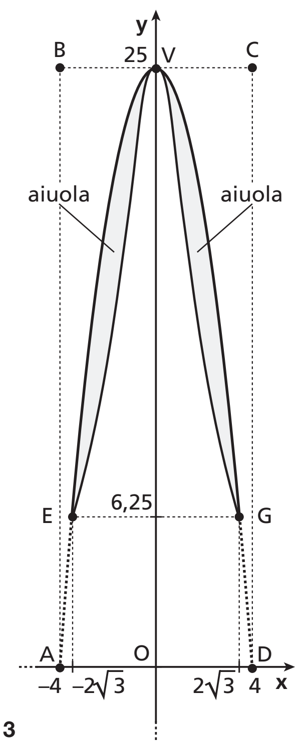


Figura 3

$$\left[-\frac{25}{48}x^3+25x-50\arctan\frac{x}{2}-\frac{25}{64}x^4+\frac{25}{2}x^2-50\ln(4+x^2)\right]_0^{2\sqrt{3}}=$$

$$\left(-\frac{25}{2}\sqrt{3}+50\sqrt{3}-\frac{50}{3}\pi-\frac{225}{4}+150-100\ln 2\right)=$$

$$\frac{375}{4}+\frac{75}{2}\sqrt{3}-\frac{100}{6}\pi-100\ln 2\simeq 37,03.$$

Servono allora 37,03 m^3 di terreno vegetale per riempire l'aiuola delimitata dalla curva nell'intervallo $[-2\sqrt{3}\,;0]$.

d. L'equazione cartesiana del generico piano è $ax+by+cz=d$, dove i coefficienti a, b, c, d sono determinati a meno di una costante moltiplicativa.

Imponendo il passaggio del piano per i tre punti $(-4; 0; 5)$, $(4; 0; 5)$ e $(0; 25; 4)$, otteniamo il sistema omogeneo di tre equazioni nelle incognite a, b, c e d:

$$\begin{cases}-4a+5c-d=0\\4a+5c-d=0\\25b+4c-d=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}8a=0\\10c-2d=0\\25b+4c-d=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=0\\d=5c\\25b+4c-5c=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=0\\c=25b\\d=5c=125b\end{cases}.$$

Abbiamo infinite soluzioni, dipendenti da un parametro, $b\in\mathbb{R}$.

Ponendo $b=1$, otteniamo il piano di equazione:

$$y+25z-125=0.$$