Liceo scientifico e opzione scienze applicate

6 Sia f la funzione, definita per tutti gli x reali, da

$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2,$$

determinare il minimo di f.

6 Il minimo di una funzione continua e derivabile nel suo dominio, se esiste, si verifica in corrispondenza di un punto stazionario o in uno degli estremi del dominio. Il dominio della funzione data $f(x)$ è $\mathbb{R}$, quindi se $f(x)$ assume il valore minimo lo fa in un punto stazionario. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = 2[(x-1)+(x-2)+(x-3)+(x-4)+(x-5)] = 2(5x-15) = 10(x-3).$$

Cerchiamo il valore di x che annulla la derivata: $f'(x) = 10(x-3) = 0 \rightarrow x-3=0 \rightarrow x=3$.
L'unico punto stazionario di f è quindi $x=3$ e abbiamo: $f'(x) < 0 \quad \text{se } x < 3, \quad f'(x) > 0 \quad \text{se } x > 3$.

Dunque $x = 3$ è un punto di minimo assoluto per $f(x)$, con $f(3) = 2^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-2)^2 = 10$.
In alternativa, possiamo sviluppare i quadrati della funzione $f(x)$ trovando: $f(x) = 5x^2 - 30x + 55$. È una parabola con la concavità rivolta verso l'alto e minimo nel vertice: $V(3; 10)$.

Figura 9