Liceo scientifico comunicazione opzione sportiva

2 Una torta di forma cilindrica è collocata sotto una cupola di plastica di forma semisferica. Dimostrare che la torta occupa meno dei $\frac{3}{5}$ del volume della semisfera.

2 Consideriamo il caso in cui la base superiore del cilindro retto corrispondente alla torta è tangente alla superficie interna della cupola semisferica. Fissata l'altezza, questa torta è la più grande possibile.
Indichiamo i volumi della cupola e della torta con V_{cupola} e V_{torta}. Dobbiamo verificare che $V_{\text{torta}} < \frac{3}{5} V_{\text{cupola}}$. Questo equivale a mostrare che $\frac{V_{\text{torta}}}{V_{\text{cupola}}} < \frac{3}{5}$.
Cerchiamo il massimo del rapporto tra i volumi della torta e della cupola, mostrando che tale massimo è sempre minore di $\frac{3}{5}$.
La figura mostra una sezione verticale di torta e cupola, con il piano di sezione perpendicolare alla base della cupola e passante per il suo centro.
Indichiamo con R il raggio della cupola semisferica e con r il raggio di base della torta. Consideriamo un angolo ϑ come indicato in figura.

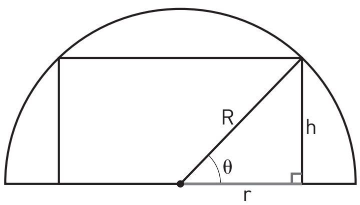


Figura 13

Il metodo più efficiente per risolvere il quesito è considerare come incognita l'altezza h della torta.
Mostriamo la risoluzione anche nel caso in cui si scelgano come incognite il raggio r della torta oppure l'angolo ϑ.

METODO 1: l'incognita è l'altezza *h*
Il volume della cupola è:

$$V_{\text{cupola}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

Scriviamo il volume della torta in funzione di h. R, r e h sono i lati di un triangolo rettangolo, quindi per il teorema di Pitagora si ha $r = \sqrt{R^2 - h^2}$, con $0 \leq h \leq R$. Calcoliamo il volume della torta:

$$V_{\text{torta}} = \pi\left(\sqrt{R^2 - h^2}\right)^2 \cdot h = \pi(R^2 - h^2) \cdot h.$$

Il rapporto tra i volumi è:

$$f(h) = \frac{\pi(R^2 - h^2) \cdot h}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{h(R^2 - h^2)}{R^3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{R^2 h - h^3}{R^3}.$$

Studiamo massimi e minimi di $f(h)$. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(h) = \frac{3}{2R^3} \cdot (R^2 - 3h^2).$$

Studiamo il segno di $f'(h)$ con $0 \leq h \leq R$:

$$\frac{3}{2R^3} \cdot (R^2 - 3h^2) \geq 0 \;\rightarrow\; R^2 - 3h^2 \geq 0 \;\rightarrow\; 3h^2 \leq R^2 \;\rightarrow$$

$$h^2 \leq \frac{R^2}{3} \;\rightarrow\; -\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot R \leq h \leq \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot R \;\rightarrow\; 0 \leq h \leq \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot R.$$

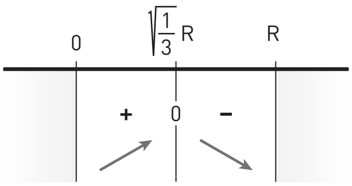


Figura 14

Pertanto, per $h = \sqrt{\frac{1}{3}}R$ il rapporto dei volumi è massimo e vale:

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}R\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{3}}R\left(R^2 - \frac{1}{3}R^2\right)}{R^3} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{3}}R\left(\frac{2}{3}R^2\right)}{R^3} = \sqrt{\frac{1}{3}} \simeq 0{,}577 < \frac{3}{5}.$$

METODO 2: l'incognita è il raggio *r*

In alternativa, è possibile risolvere il quesito considerando come incognita la variabile r, ovvero il raggio di base della torta. Il volume della cupola non dipende da r:

$$V_{\text{cupola}} = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Per il teorema di Pitagora si ha $h = \sqrt{R^2 - r^2}$, con $0 \leq r \leq R$. Calcoliamo il volume della torta in funzione di r:

$$V_{\text{torta}} = \pi r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Il rapporto tra i volumi è:

$$g(r) = \frac{\pi r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{2}\cdot\frac{r^2\sqrt{R^2 - r^2}}{R^3}.$$

Studiamo massimi e minimi di $g(r)$, con $0 \leq r \leq R$:

$$g'(r) = \frac{3}{2R^3}\cdot\left[2r\sqrt{R^2 - r^2} + r^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{R^2 - r^2}}(-2r)\right] =$$

$$\frac{3}{2R^3}\cdot 2r\left(\sqrt{R^2 - r^2} - r^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{R^2 - r^2}}\right) =$$

$$\frac{3}{R^3}\cdot r\,\frac{2(R^2 - r^2) - r^2}{2\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{3}{2R^3}\cdot\frac{r(2R^2 - 3r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Il segno della derivata coincide con quello del numeratore, poiché il denominatore è sempre positivo. Ricordando che $0 \leq r \leq R$, abbiamo:

$$r(2R^2 - 3r^2) \geq 0 \;\rightarrow\; 2R^2 \geq 3r^2 \;\rightarrow\; r^2 \leq \frac{2}{3}R^2 \;\rightarrow$$

$$-\sqrt{\frac{2}{3}}R \leq r \leq \sqrt{\frac{2}{3}}R \;\rightarrow\; 0 \leq r \leq \sqrt{\frac{2}{3}}R.$$

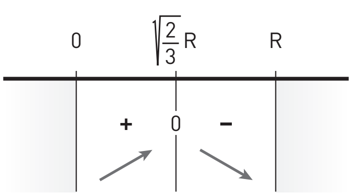


Figura 15

Pertanto, per $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$ il rapporto dei volumi è massimo e vale:

$$g\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)^2\sqrt{R^2-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)^2}}{R^3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{2}{3}R^2\sqrt{R^2-\frac{2}{3}R^2}}{R^3}=\sqrt{\frac{1}{3}}\simeq 0{,}577<\frac{3}{5}.$$

METODO 3: l'incognita è l'angolo ϑ

Il volume della semisfera è

$$V_{\text{cupola}}=\frac{2}{3}\pi R^3$$

e il volume della torta è

$$V_{\text{torta}}=\pi r^2\cdot h.$$

Come mostrato nella figura iniziale, r, R e ϑ sono gli elementi del triangolo rettangolo, quindi:

$$r=R\cos\vartheta \text{ e } h=R\sin\vartheta.$$

Dunque:

$$V_{\text{torta}}=\pi r^2\cdot h=\pi(R\cos\vartheta)^2\cdot R\sin\vartheta=\pi R^3\cos^2\vartheta\sin\vartheta.$$

Pertanto la funzione che esprime il rapporto tra i volumi è:

$$m(\vartheta)=\frac{\pi R^3\cos^2\vartheta\sin\vartheta}{\frac{2}{3}\pi R^3}=\frac{3}{2}\cos^2\vartheta\sin\vartheta.$$

Poiché la figura è simmetrica, possiamo limitare lo studio della funzione all'intervallo $0\le\vartheta\le\frac{\pi}{2}$. Studiamo dunque massimi e minimi della funzione $m(\vartheta)$, con $0\le\vartheta\le\frac{\pi}{2}$.
Calcoliamo la derivata prima:

$$m'(\vartheta)=\frac{3}{2}[2\cos\vartheta(-\sin\vartheta)\cdot\sin\vartheta+\cos^2\vartheta\cdot\cos\vartheta]=\frac{3}{2}\cos\vartheta(-2\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta).$$

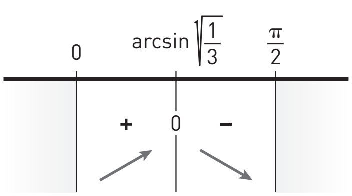
Poiché $\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta=1$ otteniamo:

$$m'(\vartheta)=\frac{3}{2}\cos\vartheta(-2\sin^2\vartheta+1-\sin^2\vartheta)=\frac{3}{2}\cos\vartheta(-3\sin^2\vartheta+1).$$

Studiamo il segno della derivata prima in $0\le\vartheta\le\frac{\pi}{2}$. Poiché nel primo quadrante si ha $\sin\vartheta\ge 0$ e $\cos\vartheta\ge 0$:

$$\frac{3}{2}\cos\vartheta(-3\sin^2\vartheta+1)\ge 0\ \rightarrow\ -3\sin^2\vartheta+1\ge 0\ \rightarrow$$

$$\sin^2\vartheta\le\frac{1}{3}\ \rightarrow\ -\sqrt{\frac{1}{3}}\le\sin\vartheta\le\sqrt{\frac{1}{3}}\ \rightarrow\ 0\le\vartheta\le\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}.$$



■ **Figura 16**

Dallo schema dei segni deduciamo che per $\vartheta=\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}$, ovvero per $\sin\vartheta=\sqrt{\frac{1}{3}}$, il rapporto tra i volumi è massimo.

Poiché:

$$m(\vartheta) = \frac{3}{2}\cos^2\vartheta \sin\vartheta = \frac{3}{2}(1 - \sin^2\vartheta)\sin\vartheta,$$

il valore massimo del rapporto dei volumi è:

$$m\left(\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right)\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \simeq 0,577 < \frac{3}{5}.$$