Scuole italiane all'estero • Europa

PROBLEMA 2

Sia data la famiglia di funzioni $f(x) = \ln\left(\dfrac{a-x}{x^2+4}\right) + bx$.

1. Determina per quale valore di a e b il grafico della funzione passa per l'origine e ha un massimo nel punto di ascissa 2;
2. trovata l'espressione analitica della funzione, dopo aver definito il campo di esistenza, determina le equazioni degli eventuali asintoti;
3. determina l'area della regione piana delimitata dalla retta tangente alla curva nell'origine, dalla curva stessa e dalla retta passante per il suo punto di massimo e parallela all'asse y;
4. calcola infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della parte di piano delimitata dalla tangente in O, dalla bisettrice del primo quadrante e dalla retta passante per il suo punto di massimo e parallela all'asse y.

PROBLEMA 2

1. Il grafico della funzione:

$$f(x) = \ln\left(\frac{a-x}{x^2+4}\right) + bx$$

passa per l'origine del sistema di riferimento se:

$$f(0) = 0 \rightarrow \ln\frac{a}{4} = 0 \rightarrow \frac{a}{4} = 1 \rightarrow a = 4.$$

La funzione corrispondente:

$$f(x) = \ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + bx$$

ha dominio:

$$\frac{4-x}{x^2+4} > 0 \rightarrow 4-x > 0 \rightarrow x < 4$$

ed è derivabile nel suo dominio, quindi ha un massimo nel punto di ascissa $x = 2$ se la derivata prima si annulla in tale punto, è positiva prima e negativa dopo.
Calcoliamo la derivata prima e imponiamo che si annulli in $x = 2$:

$$f'(x) = \frac{x^2+4}{4-x} \cdot \frac{-(x^2+4)-(4-x)\cdot 2x}{(x^2+4)^2} + b \rightarrow f'(x) = \frac{x^2-8x-4}{(x^2+4)(4-x)} + b;$$

$$f'(2) = 0 \rightarrow \frac{4-16-4}{(4+4)(4-2)} + b = 0 \rightarrow \frac{-16}{8\cdot 2} + b = 0 \rightarrow b = 1.$$

Studiamo il segno della derivata prima della funzione $f(x) = \ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + x$:

$$f'(x) = \frac{x^2-8x-4}{(x^2+4)(4-x)} + 1 \rightarrow f'(x) = \frac{x^2-8x-4+4x^2-x^3+16-4x}{(x^2+4)(4-x)} \rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{-x^3+5x^2-12x+12}{(x^2+4)(4-x)}.$$

Scomponiamo il numeratore con la regola di Ruffini, ricordando che il polinomio si annulla per $x = 2$.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & +5 & -12 & +12 \\ 2 & & -2 & +6 & -12 \\ \hline & -1 & +3 & -6 & 0 \end{array}$$

La derivata prima si può allora scrivere nella seguente forma:

$$f'(x) = \frac{(2-x)(x^2-3x+6)}{(x^2+4)(4-x)}.$$

Il trinomio x^2-3x+6 e il binomio x^2+4 sono sempre positivi in $\mathbb{R}$; il binomio $4-x$ è positivo nel dominio $x<4$ della funzione. Il segno di $f'(x)$ è quindi determinato dal binomio $2-x$ e risulta:

- $f'(x)>0$ e $f(x)$ crescente per $2-x>0 \rightarrow x<2$;
- $f'(x)<0$ e $f(x)$ decrescente per $2-x<0 \rightarrow 2<x<4$.

Il punto di ascissa $x=2$ risulta effettivamente un punto di massimo (assoluto) e l'espressione analitica della funzione cercata è dunque:

$$f(x) = \ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + x.$$

2. Il dominio della funzione è $]-\infty; 4[$.

Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio per determinare gli eventuali asintoti.

- $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-}\left[\ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right)+x\right] = -\infty,$

  la funzione ammette l'asintoto verticale $x=4$.

- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left[\ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right)+x\right] = -\infty,$

  valutiamo se la funzione presenta un asintoto obliquo per $x\to-\infty$ (anche se il fatto che la funzione presenta un termine lineare e un termine logaritmico fa escludere l'esistenza di tale asintoto).

  $$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\left[\ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right)+x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}\ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right)+1\right] = 1,$$

  perché nella forma indeterminata $0\cdot\infty$ data dal termine $\frac{1}{x}\ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right)$ prevale l'infinitesimo $\frac{1}{x}$ rispetto all'infinito $\ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right)$.

  $$q = \lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right)+x-x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right)\right] = -\infty,$$

  quindi l'asintoto obliquo non esiste (come avevamo ipotizzato).

3. Disegniamo un grafico approssimativo della funzione, per individuare la regione di cui dobbiamo calcolare l'area.

Riassumiamo le caratteristiche note di $f(x)$:

- è definita per $x<4$,
- è crescente per $x<2$ e decrescente per $2<x<4$; il punto di massimo in $x=2$ ha ordinata

  $$f(2) = \ln\frac{4-2}{4+4}+2 = \ln\frac{1}{4}+2 \simeq 0{,}614;$$

- passa per l'origine del sistema di riferimento;
- presenta un asintoto verticale di equazione $x=4$, mentre tende a $-\infty$ per $x\to-\infty$, senza asintoto obliquo.

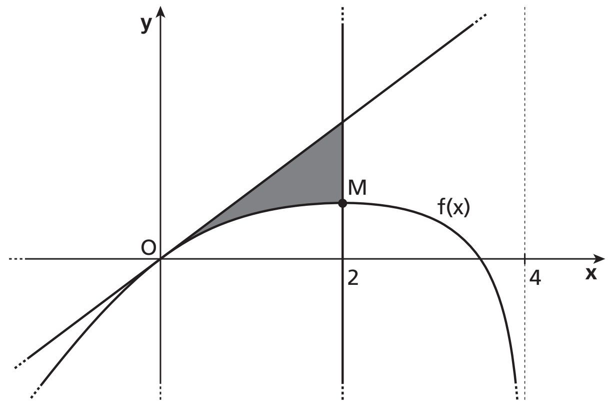

Figura 5

La retta tangente al grafico nell'origine ha coefficiente angolare:

$$m = f'(0) = \frac{(2-0)(0^2 - 3\cdot 0 + 6)}{(0^2+4)(4-0)} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4},$$

ed equazione:

$$y = \frac{3}{4}x.$$

In figura abbiamo evidenziato l'area della regione delimitata dalla retta tangente alla curva nell'origine, dal grafico di $f(x)$ e dalla retta passante per il suo punto di massimo e parallela all'asse y. Calcoliamo la sua area mediante l'integrale:

$$A = \int_0^2 \left[\frac{3}{4}x - \ln\frac{4-x}{x^2+4} - x\right]dx = \int_0^2 \left[-\frac{1}{4}x - \ln\frac{4-x}{x^2+4}\right]dx.$$

Calcoliamo, per parti, l'integrale indefinito del termine logaritmico, trascurando la costante additiva finale:

$$\int \ln\frac{4-x}{x^2+4}dx = \int[\ln(4-x) - \ln(x^2+4)]dx = \int \ln(4-x)dx - \int \ln(x^2+4)dx =$$

$$x\ln(4-x) + \int\frac{x}{4-x}dx - x\ln(x^2+4) + 2\int\frac{x^2}{x^2+4}dx =$$

$$x\ln(4-x) - \int\frac{x-4+4}{x-4}dx - x\ln(x^2+4) + 2\int\frac{x^2+4-4}{x^2+4}dx =$$

$$x\ln(4-x) - \int\left(1+\frac{4}{x-4}\right)dx - x\ln(x^2+4) + 2\int\left(1-\frac{4}{x^2+4}\right)dx =$$

$$x\ln(4-x) - x - 4\ln|x-4| - x\ln(x^2+4) + 2x - 8\int\left(\frac{1}{x^2+4}\right)dx =$$

$$x\ln(4-x) - x - 4\ln|x-4| - x\ln(x^2+4) + 2x - 4\int\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx =$$

$$x\ln(4-x) + x - 4\ln|x-4| - x\ln(x^2+4) - 4\arctan\frac{x}{2}.$$

Possiamo procedere col calcolo dell'area:

$$A = \int_0^2 \left[-\frac{1}{4}x - \ln\frac{4-x}{x^2+4} \right] dx =$$

$$\left[-\frac{x^2}{8} - x\ln(4-x) - x + 4\ln|x-4| + x\ln(x^2+4) + 4\arctan\frac{x}{2} \right]_0^2 =$$

$$\left[-\frac{4}{8} - 2\ln(4-2) - 2 + 4\ln|2-4| + 2\ln(4+4) + 4\arctan\frac{2}{2} \right] - \left[4\ln|0-4| + 4\arctan\frac{0}{2} \right] =$$

$$\left[-\frac{1}{2} - 2\ln 2 - 2 + 4\ln 2 + 2\ln 2^3 + 4\arctan 1 \right] - \left[4\ln 2^2 + 4\arctan 0 \right] =$$

$$-\frac{5}{2} + (-2+4+6-8)\ln 2 + 4\cdot\frac{\pi}{4} = \pi - \frac{5}{2} \simeq 0,642.$$

4. Rappresentiamo la regione da ruotare attorno all'asse x, delimitata dalla tangente in O, dalla bisettrice del primo quadrante e dalla retta passante per il punto di massimo di $f(x)$ e parallela all'asse y.

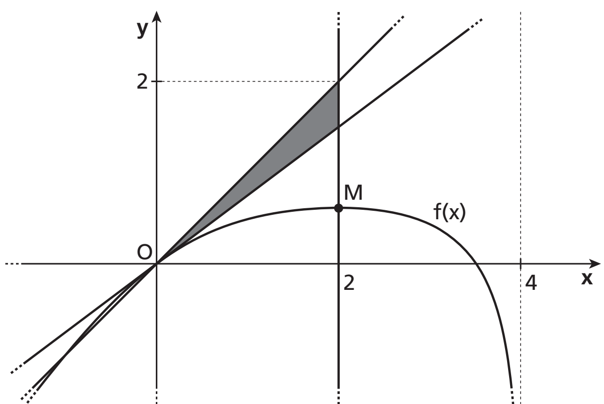

Figura 6

Il solido ottenuto ruotando attorno all'asse x tale regione è equivalente a un cono retto di altezza 2 e raggio di base 2, da cui è stato scavato un cono circolare retto di altezza 2 e raggio di base $\frac{3}{4}\cdot 2 = \frac{3}{2}$.

Il volume del solido è quindi dato da:

$$V = \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\pi\cdot 2^2 - \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{3}{2}\right)\pi = \frac{16-9}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi \simeq 3,665.$$